

Chapitre 3 : Equations de bilans

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la description du comportement dynamique des fluides en tenant compte des causes régissant ce comportement. Nous avons vu au chapitre 2 comment décrire un milieu fluide dans son mouvement en adoptant une description lagrangienne ou eulérienne. Nous avons vu également que la description eulérienne est la plus adaptée aux applications pratiques.

On se propose dans ce chapitre de récapituler les équations de conservation vérifiées par un milieu fluide dans son mouvement. Ces équations ne seront autres qu'une reformulation des lois universelles fondamentales de la mécanique classique (il s'agit essentiellement des lois de conservation de quantité de mouvement, de moment cinétique et de l'énergie) dans le cadre de la description eulérienne de l'évolution des fluides et en termes des variables eulériennes. Elles font le point sur des bilans des grandeurs physiques globales définies comme des intégrales sur un volume de contrôle arbitraire. L'application du théorème de la divergence permet d'en déduire des bilans locaux de ces grandeurs qui constitueront les équations régissant le comportement thermodynamique des milieux fluides.

Dans le paragraphe suivant nous nous proposons de définir la classification adoptée en mécanique des fluides des forces mises en jeu dans les écoulements. Nous introduisons également le tenseur des contraintes caractéristique des forces de contact. Dans les troisième, quatrième et cinquième paragraphes nous établissons les équations de conservation respectivement de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie. Dans le dernier paragraphe nous revenons sur les théorèmes généraux de la mécanique des fluides.

3.2 Force à distance – Force de contact – Tenseur des contraintes

3.2.1 Force à distance – Force de contact

Avant d'établir les équations de bilans de quantité de mouvement et d'énergie pour un fluide, il est nécessaire de décrire les différents types de forces qui peuvent agir sur ces milieux.

Nous connaissons en physique qu'il existe dans la nature quatre types de forces : les interactions gravitationnelles – les interactions électromagnétiques – les interactions faibles et les interactions fortes, et que l'un des défis majeurs des physiciens consiste à l'unification de ces quatre forces. Cependant, pour la mécanique des milieux continus, et en raison du spectre des échelles caractéristiques d'observation de la matière considérées, une autre classification des forces agissant sur ces milieux est adoptée. Les forces sont classées selon leur portée en deux catégories.

La force de gravité, qui s'exerce sur des distances extrêmement grandes par rapport aux dimensions moléculaires, agit en tout point du milieu continu et, de ce fait, la force de gravité agissant sur un élément de volume est proportionnelle à son volume. Cette force est dite en mécanique des milieux continus *force à distance* ou *force de volume*.

Les interactions intermoléculaires qui assurent la cohésion de la matière, bien qu'elles soient d'origine électromagnétique, ont une portée à peine plus grande que les dimensions moléculaires et par conséquent pour un élément de volume ces interactions ne vont concerner qu'une mince couche externe de matière qui l'enveloppe. La force globale exercée par ces interactions à courte portée est proportionnelle à l'aire de la surface délimitant cet élément de volume indépendamment de son volume. Elle est appelée en mécanique des milieux continus *force de contact* ou *force de surface*.

Les interactions faibles et fortes, qui agissent sur des distances extrêmement faibles par rapport aux dimensions moléculaires (échelle de longueur nucléaire), restent invisibles à l'échelle d'observation de la mécanique des milieux continus.

3.2.2 Tenseur des contraintes

On considère en un point M du domaine D le repère orthonormé direct $(M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Soit le volume élémentaire du domaine D délimité par un trièdre droit $(M P_1 P_2 P_3)$ de sommet principal M et d'arrêtes les axes du repère comme le montre la figure 5.1 ci-dessous. On note également \mathbf{n} le vecteur normal à la surface du triangle $(P_1 P_2 P_3)$.

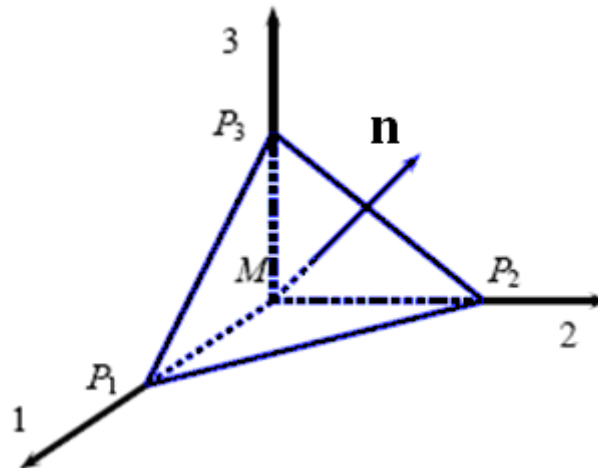


Figure 1 : Volume élémentaire de forme triédrique

La force de contact exercée par le reste du milieu continu sur ce volume est proportionnelle à l'aire de sa surface. Si on note $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ la densité surfacique de cette force à la surface plane de vecteur normal \mathbf{n} , la résultante des forces de contact sera donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A + \mathbf{T}(-\mathbf{e}_i)\delta A_i \quad (3-1)$$

où δA et δA_i représentent les surfaces des faces du trièdre. Les signes '-' qui apparaissent devant les vecteurs \mathbf{e}_i proviennent du fait qu'il faut considérer les vecteurs normaux aux surfaces du trièdre dirigés vers l'extérieur. D'après le principe de l'action et de la réaction, la relation (3-1) peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A - \mathbf{T}(\mathbf{e}_i)\delta A_i \quad (3-2)$$

si on considère de plus les surfaces δA_i comme des projections de δA :

$$\delta A_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n})\delta A \quad (3-3)$$

on aura alors :

$$\mathbf{F}_c = [\mathbf{T}(\mathbf{n}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{T}(\mathbf{e}_i)] \delta A \quad (3-4)$$

en faisant tendre les dimensions linéaires du trièdre vers 0, son inertie ainsi que la force de volume à laquelle il est soumis deviennent nulles. Pour que la loi fondamentale de la dynamique appliquée à ce trièdre soit respectée, il faut que la force de contact \mathbf{F}_c soit nulle. D'où on tire la relation :

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{T}(\mathbf{e}_i) \quad (3-5)$$

ou autrement exprimé :

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{e}_i \mathbf{T}(\mathbf{e}_i)] \quad (3-6)$$

L'équation (3-6) peut s'écrire également :

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (4-7)$$

Où $\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur du second ordre dont la contraction avec un vecteur unitaire \mathbf{n} représente la densité surfacique des efforts de contact exercés sur la surface orthogonale à \mathbf{n} . Ce tenseur est appelé *tenseur des contraintes*. En introduisant le champ scalaire de pression p , ce tenseur, qu'on démontre qu'il est symétrique (voir paragraphe 3.4.3), peut être décomposé en la somme d'un tenseur sphérique associé à la pression et d'un tenseur symétrique non isotrope $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3-8)$$

La première contribution (sphérique) appelée *tenseur des contraintes de pression* représente les efforts exercés orthogonalement à cette surface (ou efforts de pression) et qui subsistent même en absence d'écoulement. Tandis que la seconde contribution est appelée *tenseur des contraintes de cisaillement* et représente les efforts tangentiels à cette surface dus aux effets visqueux qui se produisent au sein du fluide.

3.3 Conservation de la quantité de mouvement

3.3.1 Enoncé :

Si on considère un volume de contrôle D_C délimité par une surface Σ_C et un repère $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

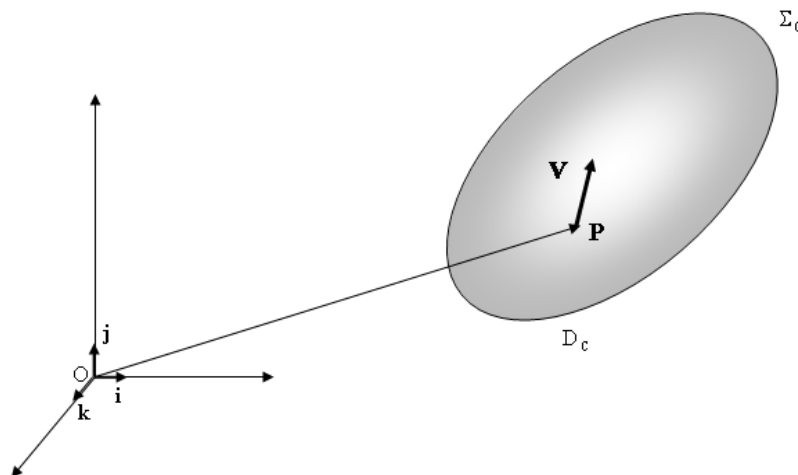


Figure 2 : Volume de contrôle arbitraire

La quantité de mouvement totale contenue dans le volume de contrôle D_C est donnée par l'intégrale suivante :

$$\mathbf{M} = \int_{D_C} \rho \mathbf{v} d\tau \quad (3-9)$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement n'est autre que la loi de Newton qui s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3-10)$$

où \mathbf{F}_{ext} est la résultante des forces extérieures exercées sur le volume D_C . Ce principe stipule que toute variation de la quantité de mouvement \mathbf{M} est due à l'action d'une force appliquée par le milieu extérieur et réciproquement.

3.3.2 Forme globale :

La force totale exercée sur le volume D_C est la somme des contributions des forces à distance (ou volumiques) qui s'exercent en tout point du domaine et qui peuvent être représentées par une intégrale de volume et des forces de contact (ou surfaciques) représentées par une intégrale de surface correspondant au flux du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ à travers Σ_C .

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3-11)$$

\mathbf{f} étant la densité massique de la force à distance, elle coïncide avec l'accélération de pesanteur \mathbf{g} si le repère R est galiléen lié à la terre.

Le développement de l'équation (3-10), compte tenu des équations (3-9) et (3-11), permet d'établir la forme intégrale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\int_{D_C} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3-12)$$

Compte tenue de la décomposition (3-8) du tenseur des contraintes, ce bilan global de quantité de mouvement s'écrit :

$$\int_{D_C} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \, d\tau + \int_{\Sigma_C} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \, d\tau - \int_{\Sigma_C} p \mathbf{n} \, ds + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3-13)$$

Les deux derniers termes du second membre de ce bilan global représentent les forces de pression et de cisaillement exercées sur le volume de contrôle D_C à travers sa surface Σ_C .

3.3.3 Forme locale :

En utilisant le théorème de la divergence, l'équation (3-12) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{D_C} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \, d\tau + \int_{D_C} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\tau = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \, d\tau + \int_{D_C} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\tau \quad (3-14)$$

Et ceci est vrai quelque soit le domaine D_C . On peut en déduire alors facilement la forme locale suivante de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3-15)$$

qui s'écrit également en utilisant la décomposition (3-8) du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-16)$$

Cette équation traduit la conservation de quantité de mouvement dans un volume élémentaire centré sur un point de l'écoulement. Le développement du premier membre de cette équation permet de la réécrire sous la forme suivante :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-17)$$

On rappelle l'équation locale de conservation de la masse (2-28) établie dans le chapitre précédent qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3-18)$$

Et par suite l'équation (3-17) se réduit à :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-19)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3-20)$$

3.4 Conservation du moment cinétique

3.4.1 Enoncé :

Le moment cinétique stocké dans un volume de contrôle D_c par rapport à un point A fixe est donné par l'expression suivante :

$$\Gamma_A = \int_{D_c} \mathbf{AP} \wedge (\rho \mathbf{v}) d\tau \quad (3-21)$$

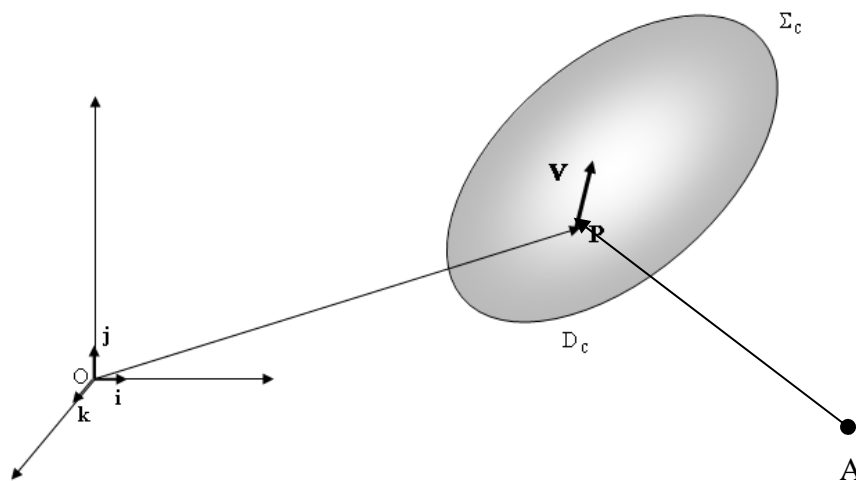


Figure 3 : Moment cinétique calculé par rapport à un point A

Le principe de conservation du moment cinétique stipule que toute variation du moment cinétique Γ_A par rapport au point A est due à l'action du moment d'une force extérieure exercée sur D_c et réciproquement. Il s'écrit :

$$\frac{d\Gamma_A}{dt} = \mathbf{Moment}_A(\mathbf{F}_{ext}) \quad (3-22)$$

3.4.2 Forme globale :

Le moment total des forces exercées sur le domaine D_c par rapport au point A, compte tenue de leur expression (3-11), est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{Moment}_A(\mathbf{F}_{\text{ext}}) = \int_{D_c} \mathbf{AP} \wedge (\rho \mathbf{f}) d\tau + \int_{\Sigma_c} \mathbf{AP} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3-23)$$

La dérivée matérielle du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\Gamma_A}{dt} = \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{AP} \wedge \mathbf{v})] d\tau + \int_{\Sigma_c} [\rho(\mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS \quad (3-24)$$

On déduit alors la forme globale de conservation de moment cinétique :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{AP} \wedge \mathbf{v})] d\tau + \int_{\Sigma_c} [\rho(\mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS = \int_{D_c} \mathbf{AP} \wedge (\rho \mathbf{f}) d\tau + \int_{\Sigma_c} \mathbf{AP} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3-25)$$

3.4.3 Forme locale : symétrie du tenseur des contraintes

En utilisant le pseudo-tenseur d'orientation $\boldsymbol{\varepsilon}$, l'équation globale de conservation du moment cinétique (3-25) s'écrit encore sous la forme indicielle suivante :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k)] d\tau + \int_{\Sigma_c} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l)] \mathbf{n}_l dS = \int_{D_c} \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) d\tau + \int_{\Sigma_c} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) \mathbf{n}_l dS \quad (3-26)$$

Le théorème de la divergence permet de réécrire (3-26) comme suit :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k)] d\tau + \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial X_1} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l)] d\tau = \int_{D_c} \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) d\tau + \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial X_1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) d\tau \quad (3-27)$$

d'où on déduit l'expression locale de l'équation de conservation de moment cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k)] + \frac{\partial}{\partial X_1} [\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l)] = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) + \frac{\partial}{\partial X_1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) \quad (3-28)$$

Qui s'écrit encore :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_k) + \frac{\partial}{\partial X_1} (\rho \mathbf{v}_k \mathbf{v}_l) \right] = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) + \frac{\partial}{\partial X_1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) \quad (3-29)$$

D'après l'équation (3-15) de conservation de quantité de mouvement on aura :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \left[\rho \mathbf{f}_k + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}}{\partial X_1} \right] = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j (\rho \mathbf{f}_k) + \frac{\partial}{\partial X_1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} \mathbf{x}_j \boldsymbol{\sigma}_{kl}) \quad (3-30)$$

Soit après simplification :

$$\varepsilon_{ijk} \mathbf{x}_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} \mathbf{x}_j \sigma_{kl}) \quad (3-31)$$

Cette équation se réduit encore à :

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} = 0 \quad (3-32)$$

Ce qui implique que les éléments du tenseur des contraintes vérifient la propriété :

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \quad \text{lorsque } k \neq l \quad (3-33)$$

On déduit alors d'après cette relation que le tenseur des contraintes est symétrique.

3.5 Conservation de l'énergie

3.5.1 Energie – Travail des forces – Chaleur

Outre la matière et la quantité de mouvement, un milieu fluide est susceptible d'échanger de l'énergie au cours de son écoulement avec le milieu extérieur. Cette grandeur extensive de dimension ML^2T^{-2} se manifeste à l'échelle macroscopique sous plusieurs formes telles que : la chaleur, le travail mécanique (de forces), l'énergie cinétique ou l'énergie électrique. Selon le premier principe de la thermodynamique, qui est un principe de conservation, l'énergie totale d'un système fluide est conservée au cours de sa transformation mais elle change de forme.

On se propose dans ce paragraphe de traduire, dans le cadre de la description eulérienne et en termes des variables d'Euler, les principes de la thermodynamique régissant l'écoulement d'un fluide.

3.5.2 Premier principe de la thermodynamique : Equations globales et locales de conservation de l'énergie

3.5.2.1 Enoncé

Considérons comme les cas précédents un volume de contrôle D_c délimité par une surface Σ_c :

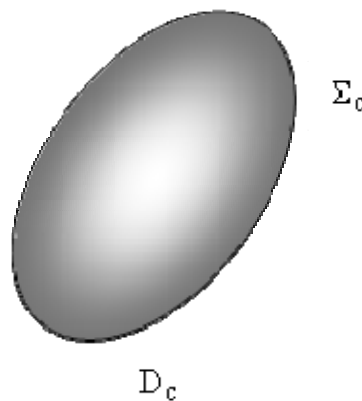


Figure 4 : Volume de contrôle arbitraire

L'énergie contenue dans ce volume de contrôle est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne. Elle peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$E = E_c + E_I = \int_{D_c} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) d\tau \quad (3-34)$$

où $\frac{v^2}{2}$ est la densité massique de l'énergie cinétique et e est la densité massique de l'énergie interne. On note que cette expression de l'énergie est valable à l'échelle macroscopique. En effet, à l'échelle microscopique le stockage de l'énergie interne dans D_c est effectué en la distribuant sous forme d'énergie cinétique d'agitation sur les molécules présentes dans ce milieu.

Le premier principe de la thermodynamique correspond au principe de conservation de l'énergie. Il énonce que la variation de l'énergie totale E de D_c entre deux instants est égale à la somme du travail et de la chaleur échangés avec le milieu extérieur par le bilan des forces extérieures

exercées sur le domaine et des mécanismes de transfert de chaleur (conduction – rayonnement – convection). Le principe peut être exprimé en termes de puissances par l'équation suivante :

$$\frac{dE}{dt} = P_{F_{\text{ext}}} + P_{\text{cal}} \quad (3-35)$$

Où $P_{F_{\text{ext}}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}$ est la puissance des forces extérieures et $P_{\text{cal}} = \frac{dQ}{dt}$ est la puissance calorifique.

3.5.2.2 Forme globale

Compte tenu de l'expression (3-11) de la force extérieure, la puissance $P_{F_{\text{ext}}}$ de cette force est donnée par la relation :

$$P_{F_{\text{ext}}} = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_{\Sigma_C} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} ds \quad (3-36)$$

la symétrie du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (voir paragraphe 3.4.3) permet de réécrire (3-36) ainsi :

$$P_{F_{\text{ext}}} = \int_{D_C} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_{\Sigma_C} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (3-37)$$

En ce qui concerne la puissance calorifique, il existe trois mécanismes d'échange de chaleur :

- Les échanges par conduction : Ces échanges résultent du transfert de chaleur par diffusion moléculaire. Ils s'effectuent avec le milieu extérieur à travers la surface Σ_C . Ils sont représentés par le flux d'un vecteur \mathbf{q} à travers Σ_C appelé « le vecteur courant de chaleur ». La puissance calorifique échangée par conduction s'écrit :

$$\frac{dQ_C}{dt} = - \int_{\Sigma_C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds \quad (3-38)$$

- Les échanges par rayonnement : Se sont des échanges à distance résultant du transfert de chaleur par ondes électromagnétiques. La puissance calorifique échangée par rayonnement peut être représentée par une intégrale de volume comme suit :

$$\frac{dQ_R}{dt} = \int_{D_C} \rho r d\tau \quad (3-39)$$

où r est la quantité de chaleur échangée par rayonnement avec le milieu extérieur par unité de temps et par unité de masse.

- Les échanges par convection : Ils résultent du transfert convectif de la chaleur par l'écoulement fluide. Ces échanges sont représentés par le terme convectif de la dérivée particulaire de l'énergie totale E .

La dérivée particulaire de l'énergie totale E s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] d\tau + \int_{\Sigma_c} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (3-40)$$

Le bilan global (3-35) de l'énergie sur le volume de contrôle D_c s'écrit compte tenu des équations (3-36) à (3-40) comme suit :

$$\int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] d\tau + \int_{\Sigma_c} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{D_c} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_{\Sigma_c} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Sigma_c} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{D_c} \rho r d\tau \quad (3-41)$$

3.5.2.3 Forme locale

Le bilan global de l'énergie (3-41) s'écrit en utilisant le théorème de la divergence sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] d\tau + \int_{D_c} \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \right] d\tau &= \int_{D_c} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_{D_c} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) d\tau \\ &- \int_{D_c} \nabla \cdot \mathbf{q} d\tau + \int_{D_c} \rho r d\tau \end{aligned} \quad (3-42)$$

Et ceci est vrai quelque soit le volume de contrôle D_c . On en déduit alors la forme locale de conservation de l'énergie totale qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (3-43)$$

Cette équation traduit le premier principe de la thermodynamique écrit localement pour un système thermodynamique constitué par un fluide en écoulement et dont le mouvement est décrit d'une manière eulérienne.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) v_j \right] = \rho f_j v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{jk} v_k) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho r \quad (3-44)$$

3.5.3 Equation de bilan locale de l'énergie cinétique

La projection du bilan local de quantité de mouvement (3-15) sur la vitesse nous donne :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \quad (3-45)$$

D'une part, le premier membre de ce bilan peut s'écrire dans le cas d'un fluide incompressible :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (e_c) + \nabla \cdot (e_c \mathbf{v}) \quad (3-46)$$

On note dans cette équation que la quantité $e_c = \rho \frac{v^2}{2}$ représente la densité volumique de l'énergie cinétique.

D'autre part, le dernier terme du second membre de l'équation (3-45) « $(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}$ » peut être développé pour donner :

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (3-47)$$

Ce terme s'écrit également compte tenu de l'équation locale (2-30) de conservation de la masse dans le cas incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ établie dans le chapitre 2 (voir paragraphe 2.4.3) :

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (3-48)$$

On déduit alors le bilan local de l'énergie cinétique qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_c) + \nabla \cdot (e_c \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (3-49)$$

Interprétons ce bilan à l'échelle d'un volume élémentaire de contrôle centré sur un point M de l'écoulement :

- Le premier terme du second membre représente la puissance des forces extérieures à distance.
- Le second est un terme de divergence, il correspond à un flux à travers la surface de ce volume élémentaire et représente alors la puissance des forces de contact.
- Le dernier terme qui montre une double contraction entre le tenseur des contraintes de cisaillement et le gradient de vitesse représente la puissance des efforts intérieurs.

En résumé, le bilan de l'énergie cinétique met en jeu la puissance des efforts extérieurs (à distance et de contact) et des efforts intérieurs.

3.5.4 Equation de bilan de l'énergie interne

En retranchant le bilan de l'énergie cinétique (3-49) du bilan de l'énergie totale (3-43), on obtient le bilan de l'énergie interne qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (3-50)$$

La puissance des efforts intérieurs qui figure dans les deux bilans (3-49) et (3-50) joue alors un rôle d'échange d'énergie entre le montant de l'énergie interne et le montant de l'énergie cinétique sans intervenir dans le montant de l'énergie totale.